Лекція № 5

Теорема Нетер, механічна подібність, теорема віріалу

В попередній лекції ми розглянули системи з очевидними симетріями: однорідність простору і часу, а також ізотропію простору. Але вони можуть бути і прихованими. Розглянемо систему з прихованою симетрією (хоча і не дуже прихованою) на Рис. 3.14 зображено простір, в яке поміщена спіральна лінія з віссю вздовж осі z і з кроком спіралі h.

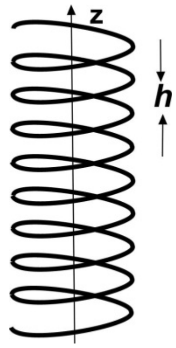


Рис.3.14. Система зі спіральною симетрією.

З малюнка очевидно, що при повороті системи на кут 2π з одночасним зрушенням уздовж осі z на величину h, ми поєднуємо систему з вихідним положенням. Якщо повернути систему на малий кут $\delta\phi$, то для суміщення системи необхідно зрушити її на величину $\delta z = (h/2\pi)\delta\phi$. При такій операції система не змінюється і не повинна змінитися її функція Лагранжа:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \phi}\delta\phi = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\delta z + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\delta\phi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\frac{dz}{d\sigma} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\frac{d\phi}{d\sigma}\right)\delta\sigma, \qquad (3.72)$$

де введено один загальний параметр перетворення. Цей вираз звертається в нуль, якщо вибрати $dz/d\sigma = h$ і $d\phi/d\sigma = 2\pi$. При цьому інтеграл руху виглядає так:

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\frac{dz}{d\sigma} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\frac{d\phi}{d\sigma}. \qquad (3.73)$$

Якщо вважати узагальненими координатами $q_1 = z$ і $q_2 = \phi$, то інтеграл руху виглядає наступним чином:

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dq_i}{d\sigma}. \qquad (3.74)$$

Так виглядає інтеграл руху, пов'язаний з певною симетрією, яка полягає в конкретному вигляді величин $dq_i / d\sigma$, для яких лагранжіан не змінюється при перетворенні. Ми бачимо, що вираз (3.74) має ту ж структуру, що і формули для імпульсу і моменту, але в даному випадку величини $dq_i / d\sigma$ різні для різних узагальнених координат.

Всі наведені приклади є частковими випадками знаходження інтегралів руху при наявності симетрій в системах. Ця процедура описується ***теоремою Еммі Нетер***.

Теорема Еммі Нетер (теорема №2, 1918).

Припустимо, що розглянута механічна система має якусь симетрією, тобто при певному нескінченно малому перетворенні узагальнених координат виду

$$q_i^\sigma = q_i + \sigma \psi_i(q,t), \quad t' = t + \sigma \tau(q,t), \quad \sigma << 1. \qquad (3.75)$$

динаміка системи не змінюється, тобто не змінюється її функція Лагранжа і варіація дії дорівнює нулю. Важливим моментом є те, що для всіх координат та часу перетворення визначається **одним, однаковим для всіх, параметром** σ. Тобто перетворення є однопараметричним.

Теорема Нетер показує, що в цих умовах система має інтеграл руху і вказує вид цього інтеграла. Характер зазначеного перетворення ясний з Рис.3.15.

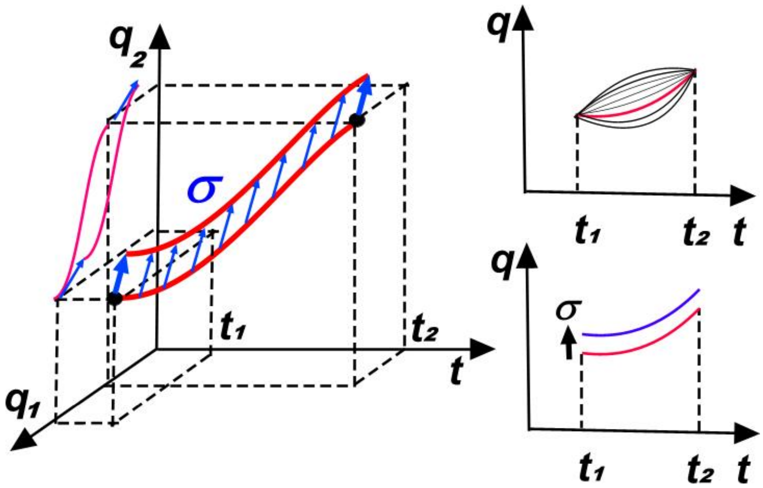


Рис.3.15. Однопараметричне інфінітезимальне перетворення координат.

Раніше, розглядаючи варіацію дії, ми порівнювали можливі траєкторії з фіксованими початковою і кінцевою точками (правий верхній малюнок) і вибирали траєкторію з мінімальним дією. Тепер ми зміщуємо цю траєкторію на величину $\sim\sigma$ (нижній правий малюнок), але під час зсуву траєкторія весь час залишається задовольняючою рівнянню Лагража. І головний момент (лівий малюнок): ми змінюємо всі координати, але синхронно, пропорційно одному параметру σ. При такому зсуві координати в початковий і кінцевий момент вже не зберігаються. Проведемо варіювання дії абсолютно так само, як в попередніх лекціях.

$$\delta S=\int_{t_1'}^{t_2'}L(q',\dot{q}',t')\,dt'-\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q},t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\frac{\partial L}{\partial t}\delta t+\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)\right]=$$
$$=\left[\left(L-\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\delta t+\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)\right]_{t_1}^{t_2}=0. \qquad (3.76)$$

Раніше при фіксованих граничних умовах і за вимоги $\delta S=0$ ми отримували рівняння Лагранжа. Тепер ми виходимо з рівнянь Лагранжа і зануляємо інтегральний доданок. Але при зазначеному перетворенні (3.75) зміни координат на межах інтервалу вже не нульові, а визначаються параметром σ. З (3.76) випливає, що зазначена величина не залежить від моменту часу і є інтегралом руху

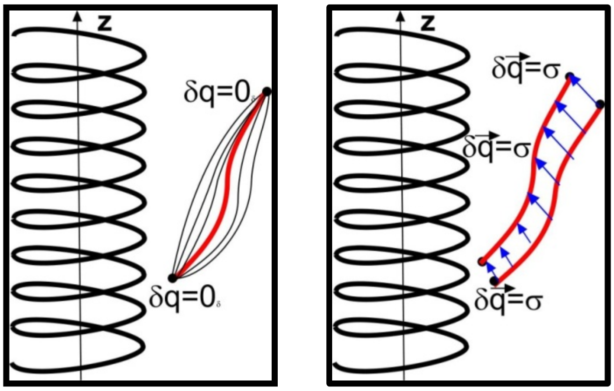
$$I=\left(\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)\frac{dt}{d\sigma}-\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{dq_i}{d\sigma}=E\tau-\sum_i p_i\psi_i\,. \qquad (3.78)$$

Всі розглянуті вище інтеграли руху (енергія, імпульс) мали саме такий вигляд. У разі повного імпульсу і повного моменту імпульсу величини $dq_i/d\sigma$ були однакові для всіх ступенів свободи і випадали із загальної формули для інтегралів. Але остання задача про спіраль давала приклад $dq_i/d\sigma$ з різними значеннями множників для двох різних узагальнених координат. В данному випадку перетворення (3.75) дає наступний короткий вираз:

$$I=E\tau-\sum_i p_i\psi_i\,, \qquad (3.79)$$

де вирази $E=\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L$ та $p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$ можуть залежати від часу та не бути інтегралами руху.

Цей приклад наочно демонструє суть підходу Е. Нетер. Розглянемо якусь траєкторію в системі зі спіральною лінією.



На першому кроці ми змінюємо різні траєкторії з фіксованим початком і кінцем цих траєкторій. Принцип мінімальності дії дає нам справжню траєкторію, зображену на малюнку червоною лінією. Зафіксувавши цю траєкторію повернемо спіраль на кут $\delta\phi$ і зрушимо її в напрямку осі z на величину $\delta z=(h/2\pi)\delta\phi$. Тобто зробимо відповідне перетворення координат. Очевидно, що в новій системі траєкторія руху матеріальної точки не зміниться. Повернемося до старої системи, в якій вся траєкторія повернеться і зрушиться як ціле на $\delta\phi$ і $\delta z=(h/2\pi)\delta\phi$, як зображено на малюнку. Це і буде обговорюване вище однопараметричне перетворення симетрії з варіацією початкової і кінцевої точок траєкторії.

Масштабна інваріантність та механічна подібність.

До цих пір ми розглядали симетрії, пов'язані з нескінченно малими зрушеннями (часу, координат, кутів повороту), які не змінювали вигляд лагранжіана. Ще одна симетрія пов'язана зі зміною масштабів координат і часу. Як було показано, функція Лагранжа визначена з точністю до постійного множника, і множення лагранжіана на довільне число не змінює рівнянь Лагранжаю, а, отже, і динаміку системи. Проведемо одночасно масштабне перетворення координат і часу (однакове для всіх частинок в системі):

$$\vec r_i \to \alpha \vec r_i, \quad t\to \beta t. \tag{3.80}$$

При цьому всі швидкості змінюються в (α/β) разів: $\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt \to (\alpha/\beta)d\vec{r}/dt$. Кінетична енергія, квадратична по швидкостях, зміниться в $(\alpha/\beta)^2$ разів. Якщо потенційна енергія зміниться теж в $(\alpha/\beta)^2$ разів, то нова функція Лагранжа в цілому буде відрізнятись від вихідної лише на множник $(\alpha/\beta)^2$, тобто динаміка не зміниться. Це може задовольнитися тільки в разі, якщо потенційна енергія має вигляд однорідної функції всіх координат з певним ступенем однорідності. **Однорідної функцією** називається функція, яка задовольняє умові:

$$U(\alpha\vec{r}_1,\alpha\vec{r}_2,\ldots,\alpha\vec{r}_N) = \alpha^k U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N), \tag{3.81}$$

де k – ступінь однорідності.

Прикладом однорідної функції є потенційна енергія лінійних систем, в яких

$$U = \sum_i a_i\vec{r}_i^{\,2} + \sum_{i<j} b_{ij}\left(\vec{r} - \vec{r}_j\right)^2, \tag{3.82}$$

і ступінь однорідності дорівнює $k = 2$.

Іншим важливим прикладом однорідної енергії є система гравітаційно взаємодіючих тіл (або тіл, що взаємодіються за законами електростатики – законом Кулона), в якій

$$U = -\sum_{i<j}\frac{\gamma m_i m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}, \tag{3.83}$$

і ступінь однорідності дорівнює $k = -1$.

У разі руху частинок в однорідному полі (наприклад, поле сили тяжіння) потенційна енергія дорівнює

$$U = -\sum_i \vec{F}\vec{r}_i, \tag{3.84}$$

зі ступенем однорідності $k = 1$.

Звідси видно, що в тому випадку, коли потенційна енергія є однорідною, можна підібрати такі співвідношення між α і β, при яких потенційна і кінетична енергії при перетворенні помножаться на одне і те ж число. Для цього необхідно виконання співвідношення

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k \quad \text{або} \quad \alpha^{2-k} = \beta^2. \tag{3.86}$$

Тоді рух допускає геометрично подібні траєкторії зі співвідношенням лінійних розмірів l'/l при відповідній зміні тимчасових характеристик

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2}. \tag{3.87}$$

У гармонійному випадку з (3.82) і (3.87) випливає, що при довільній зміні амплітуди коливань, їх частота не змінюється. Для руху в однорідному полі з (3.84) і (3.87) випливає, що $(l'/l) = (t'/t)^2$, і це узгоджується з законом Галілея $h = gt^2/2$ для часу падіння тіла з висоти h. Цікаво властивість гравітаційного потенціалу (3.83), з якого випливає, що $(t'/t) = (l'/l)^{3/2}$. У Додатку до руху планет Сонячної системи це означає, що

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2, \tag{3.88}$$

тобто виконання третього закону Кеплера. (У Законі Кеплера величини R_i відповідають великим півосям еліпсів руху планет).

До цих пір ми розглядали точні закони збереження, що виконуються в кожен момент часу. Крім цього можуть існувати величини, що зберігаються наближено при усередненні по великих проміжках часу. Наприклад, при фіксованих умовах (обсязі і тиску) зберігається середня кінетична енергія системи, усереднена по великим часам. При цьому зберігається і середня потенційна енергія. У механіці в точності зберігається тільки повна енергія, а кінетична і потенційна енергія в різні моменти часу не зберігаються. Як співвідносяться середні значення кінетичної та потенційної енергій? На це питання дає відповідь так звана **віріальна теорема**.

Віріал і віріальна теорема.

При дуже великому числі ступенів свободи рішення рівнянь механіки стає неможливим і завдання вирішується методами статистичної фізики. У ній фігурують усереднені за великим числом частинок термодинамічні величини: температура, обсяг, тиск і т.д. між ними існують співвідношення, зокрема, рівняння стану системи.

Для ідеального газу це співвідношення відомо: $NkT = PV$, де N – число частинок, k – константа Больцмана, T – температура, P – тиск і V – об’єм. У наведеному вище рівнянні стану зліва стоїть характеристика кінетичної енергії, оскільки термодинамічна температура пов'язана із середньою кінетичною енергією частинок газу: $\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT$, де кутові дужки означають усереднення. Справа стоїть характеристика потенційної енергії газу частинок в обмеженому об’ємі, пов'язана з силами, що діють на границях.

Як пов'язати термодинамічні співвідношення з усередненими характеристиками в механіці? У застосуванні до механіки ми будемо говорити про усереднення за часом при великих часах:

$$\langle f \rangle = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\,dt\,. \tag{3.89}$$

Розглянемо кінетичну енергію великого числа частинок. З огляду на квадратичну залежність кінетичної енергії від швидкостей $T = \sum m_i \vec{v}_i^2 / 2$ і визначення імпульсу $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, її можна переписати у вигляді $T = \sum \vec{v}_i \vec{p}_i / 2$. Таким чином

$$2T = \sum \vec{v}_i \vec{p}_i = \sum \vec{p}_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{r}_i \vec{p}_i - \sum_i \vec{r}_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{r}_i \vec{p}_i - \sum_i \vec{r}_i \vec{F}_i\,, \tag{3.90}$$

де $\vec{F}_i$ – сила, що діє на *i*-ту частинку.

Функція, що фігурує тут, називається віріалом Клаузіуса. Слово походить від латинського *viris* – енергія. Віріал має розмірність енергії і є скалярною величиною.

Усереднимо це співвідношення в зазначеному вище сенсі і врахуємо, що якщо функція f в (3.89) є повна похідна за часом, то

$$\langle f \rangle = \left\langle \frac{d\phi}{dt} \right\rangle = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d\phi}{dt}dt = \frac{\phi(\tau) - \phi(0)}{\tau}\,. \tag{3.91}$$

Якщо функція $\phi(t)$ приймає в процесі тільки скінченні значення, то така середня величина прагне до нуля. У нашому механічному випадку, якщо координати і імпульси частинок приймають скінченні значення, то перший доданок в правій частині (3.90) звертається в нуль. (Наприклад, через обмеженість об’єму або локалізації всіх частинок в скінченній області через їх тяжіння, а також при скінченності повної енергії системи). У цьому випадку усереднене рівняння (3.90) виглядає так:

$$2\langle T\rangle = -\left\langle \sum_i \vec{r}_i \vec{F}_i \right\rangle. \tag{3.92}$$

Вираз в правій частині визначається потенційною енергією:

$$2\langle T\rangle = \left\langle \sum_i \vec{r}_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \right\rangle. \tag{3.93}$$

Подальше спрощення можливо у випадках, коли потенційна енергія є однорідною функцією ступеню k. При цьому виникає співвідношення між середніми значеннями кінетичної і потенційної енергій:

$$2\langle T\rangle = k\langle U\rangle. \tag{3.94}$$

Зазвичай у фізиці твердого тіла в основному наближенні вважають взаємодію частинок в лінійному наближенні, тобто квадратичним з $k=2$. При цьому виникає відоме співвідношення $\langle T\rangle = \langle U\rangle$: середня кінетична енергія дорівнює середній потенційної енергії. В системі гравітаційно взаємодіючих частинок з $k=-1$ маємо $\langle U\rangle = -2\langle T\rangle$. Мінус враховує те, що кінетична енергія завжди позитивна, а енергія притягуються частинок негативна. (При відштовхуванні частинки розлітаються, і не виконується умова теореми віріала про скінченні значення координат).